

分析層級程序法 (Analytic Hierarchy Process)

淡江管科 時序時博士



Tamkang University

Management Sciences · Decision Analysis Laboratory | Since 1972





目錄

- 前言
- 基本思維
- **AHP**公理
- 分析基礎
- 一致性檢驗
- 分析步驟
- 案例：工業區地點評估問題
- 應用與擴展
- 結語



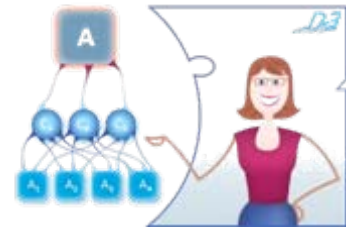
前言(一)

- 分析層級程序法(**Analytic Hierarchy Process, AHP**)是美國匹茲堡大學**T. L. Saaty** 教授於**1970**年代，為解決多項美國國內暨國際問題，所發展出來一套系統化的決策理論。
- 此方法係利用層級結構(**hierarchical structure**)的概念，協助我們對事物的理解。將一待解問題或系統依據其目標或焦點由上而下**分解(decomposition)** 成為多個層級及其元素。
- 其後再根據某些基準進行評估，並依照所發展的步驟，來處理複雜的決策問題。然後再由下至上予以**綜合(synthesis)**，而得到一整體性的解答。

前言(二)

- **AHP**除了協助我們利用圖像對問題以及其間關係的了解外，又能處理複雜的評估因素，尤其是處理不具體因素 (**intangible factors**)的影響。加上數學嚴謹、分析步驟清晰，所以很快地被大家所接受並被廣泛應用。
- 為多準則決策(**multi-criteria decision making, MCDM**)領域中一個重要分支，被稱為美國學派的代表。在**MCDM**多類方法的回顧文獻中，可以看出**AHP**是應用數量最多的方法 (**Zyoud and Fuchs-Hanusch, 2017**)。

基本思維(一)



- 一個系統或問題假設可被分解為許多被評比的元件(component)，並形成一個由上而下的層級結構。
- 其核心思考是從目標或焦點開始，再往下依序分解此目標為其細部內容，並建立準則、方案間的層級關係與相關元素。使得決策者可利用此層級結構釐清問題並建立相互間的關係。
- 在層級結構中，每一層級的元素間均假設為獨立。但每一層級的元素可用上一層級部份或所有的元素為基準，進行描述與評估。

基本思維(二)

- 評估時採用比例尺度 (ratio scale) 衡量。藉由兩兩成對比較 (pair-wise comparison) 方式，確認各階層的元素間相對優勢關係，並利用正倒值矩陣 (positive reciprocal matrix) 描述這個比較。各元素的優先比率 (priority) 是經由加權概念而得。
- 任何元素只要出現於層級結構中，不論其優先比率值為何，均被認為與整體評估結構有關。
- 一些不具體的偏好關係亦可藉此兩兩成對比較，而形成量化的關係，從而解決複雜情況難以評比的問題。

AHP公理

■ 四個公理(axiom)：

- 倒數性質(reciprocal property)

— 利用倒數性質，進行元素間兩兩成對比較。

- 同質性(homogeneity)

— 作比較時，將一般性質相似的元素集中在階層中的某一層，性質不相似的元素則按照上下階層的次序安排。

- 相依性(dependence)

— 較低階層相依於其緊鄰的高階。

- 預期性(expectation)

— 可能結果只反應在階層中良好表達的預期。

⇒ **AHP** 並不需要假設強烈的**理性(rationality)**以及嚴格的**遞移性(transitivity)**

決策分析

分析層級程序法

AHP的分析基礎



Tamkang University

Management Sciences · Decision Analysis Laboratory | Since 1972

AHP的分析基礎



- AHP原理
- 層級結構建立
- 正倒值矩陣建立與優先向量計算
- 成對比較問卷調查舉例
- 矩陣特徵值的近似計算
- 層級的綜合



AHP原理

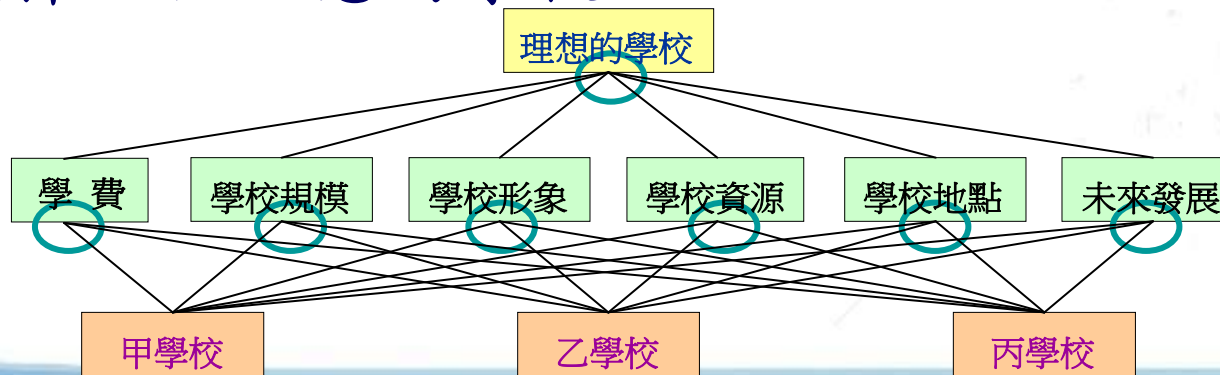
■ AHP原理有三：

- 分解(decomposition)
 - 層級結構
 - 自上而下分解
- 比較性判斷(comparative judgments)
 - 正倒值矩陣
- 優先值的綜合(synthesis of priorities)
 - 自下而上綜合



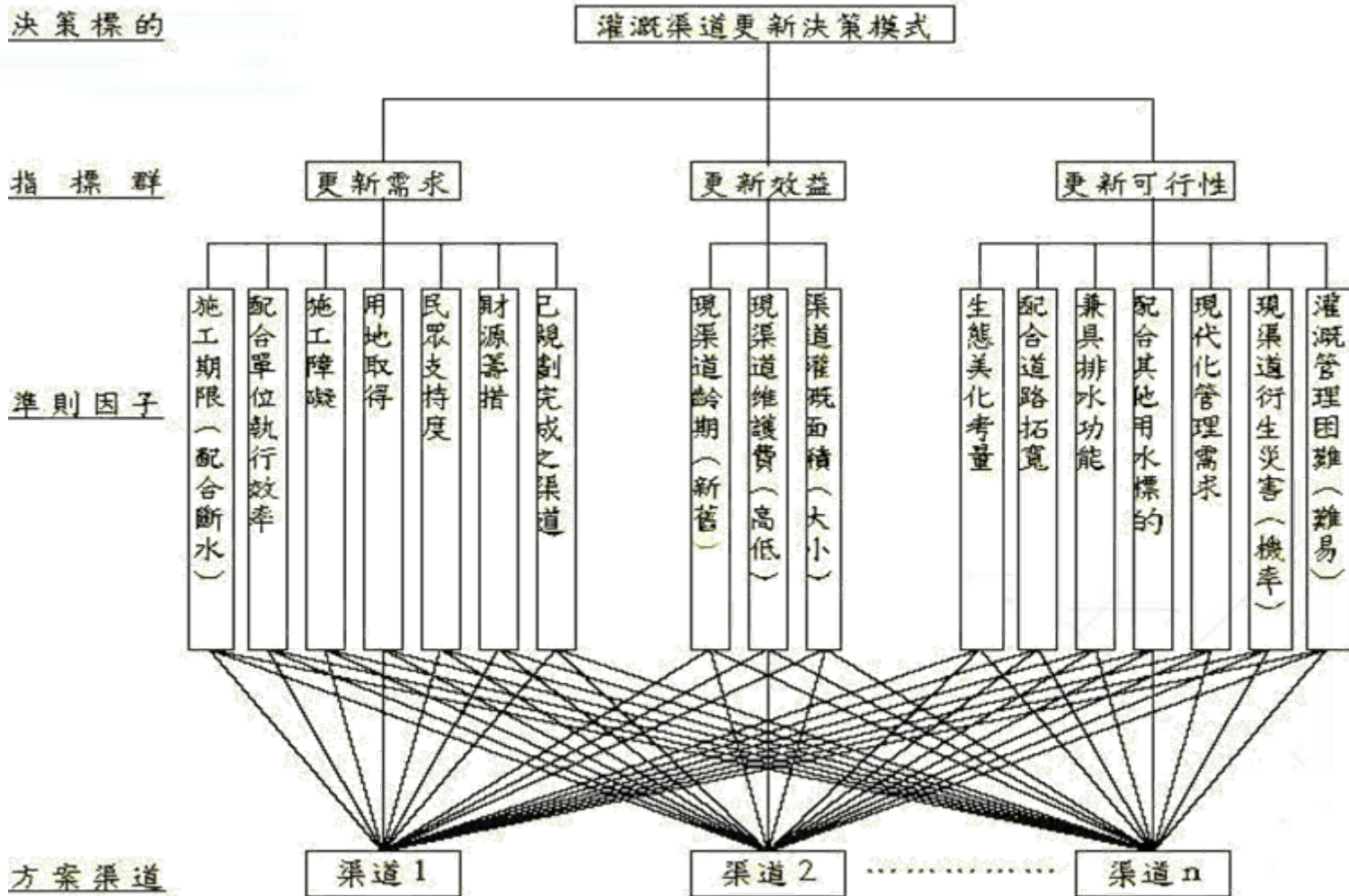
層級結構建立

- 層級結構至少定義三個層級
 - 問題的焦點或整體目標 (goal, 上層)
 - 定義方案的多項準則 (criteria, 中層)
 - 競爭的方案 (alternatives, 下層)
- 在層級結構中，從上往下分解問題，下階的內容是可以支持上階的。
- 層級舉例：選擇一個理想的學校



層級結構舉例(一)

■ 四個層級



灌溉渠道更新決策層級分析架構圖

層級結構舉例(二)

■ 層級結構的可能形式：

- **Goal, criteria, alternatives**
- **Goal, criteria, sub-criteria, alternatives**
- **Goal, scenarios, criteria, (sub-criteria), alternatives**
- **Goal, actors, criteria, (sub-criteria), alternatives**
- **Goal sub-criteria, levels of intensities (many alternatives)**
- **其他構思...**



A Complete Hierarchy to Level of Objectives

Focus:

At what level should the Dam be kept: Full or Half-Full

Decision Criteria:

Financial

Political

Env't Protection

Social Protection

Decision Makers:

Congress

Dept. of Interior

Courts

State

Lobbies

Factors:

Clout

Legal Position

Potential
Financial
Loss

Irreversibility
of the Env't

Archeo-
logical
Problems

Current
Financial
Resources

Groups Affected:

Farmers

Recreationists

Power Users

Environmentalists

Objectives:

Irrigation

Flood Control

Flat Dam

White Dam

Cheap Power

Protect
Environment

Alternatives:

Half-Full Dam

Full Dam

正倒值矩陣建立(一)

- 層級結構建立後，就開始元素間的比較，此時就形成兩兩成對比較矩陣或正倒值矩陣。
- 某一層級的要素 A_1, A_2, \dots, A_n ，在上一層某一要素為評估的基準下，其權重分別為 w_1, w_2, \dots, w_n 。則 A_i 與 A_j 的相對權重為 w_i / w_j ，並置於矩陣A中第 (i, j) 的位置。此矩陣為一 $n \times n$ 的方陣。

$$\mathbf{A} = [a_{ij}] = \begin{matrix} & \begin{matrix} A_1 & A_2 & \dots & A_n \end{matrix} \\ \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{matrix} & \begin{bmatrix} w_1/w_1 & w_1/w_2 & \dots & w_1/w_n \\ w_2/w_1 & w_2/w_2 & \dots & w_2/w_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_n/w_1 & w_n/w_2 & \dots & w_n/w_n \end{bmatrix} \end{matrix}$$

正倒值矩陣建立(二)



- 成對比較時使用九點重要性強度尺度 (a nine-point intensity scale of importance) 以及其倒數：

分析層級程序法 評比尺度意義及說明

評估尺度	定義	說明
1	同等重要 (Equal Importance)	兩比較方案的貢獻程度具同等重要性 ● 等強 (Equally)
3	稍重要 (Weak Importance)	經驗與判斷稍微傾向喜好某一方案 ● 稍強 (Moderately)
5	頗重要 (Essential Importance)	經驗與判斷強烈傾向喜好某一方案 ● 頗強 (Strongly)
7	很重要 (Very Strong Importance)	實際顯示非常強烈傾向喜好某一方案 ● 極強 (Very Strongly)
9	絕對重要 (Absolute Importance)	有足夠證據肯定絕對喜好某一方案 ● 絕強 (Extremely)
2、4、6、8	兩相鄰尺度之中間值 (Intermediate Values)	需要折衷值時





正倒值矩陣舉例 (一)

■ 小汽車評估準則間比較之正倒值矩陣

- 對角線元素為 1：自己與自己比較為同等重要
- 隔對角線對稱的元素互為倒數：重要度的表達為相反
- 此等矩陣大小與其間的關係常以專家會議、訪談或是問卷調查得到。
- 本例中共 5 個準則，所以形成一個 5×5 的矩陣。

A

準則 / 屬性	動力	顏色	價格	性能	服務
動力	1	3	1/5	1	1/3
顏色	1/3	1	1/7	1/3	1/7
價格	5	7	1	3	1
性能	1	3	1/3	1	1/2
服務	3	7	1	2	1

正倒值矩陣舉例 (二)

■ 小汽車評估準則間比較之優先向量(priority vector) 或權重(weight)計算

- 求取矩陣列(row)向量的幾何平均值近似後，再正規化。
- 另有不同的近似方法。

A

準則 / 屬性	動力	顏色	價格	性能	服務
動力	1	3	1/5	1	1/3
顏色	1/3	1	1/7	1/3	1/7
價格	5	7	1	3	1
性能	1	3	1/3	1	1/2
服務	3	7	1	2	1

r

G.M.	Priority Vector
0.7248	0.1108
0.2959	0.0452
2.5365	0.3879
0.8706	0.1331
2.1118	0.3229
6.5395	1.0000

成對比較問卷調查舉例

■ 兩兩成對比較的問卷設計型式

- 以 1 為中心，向左(左邊項目強)及向右(右邊項目強)分別延伸至 9。

填答方式舉例如下：

當您購買汽車時，所考量的因素很多，其中因素有「性能」、「價格」、「造型」與「安全性」。

1. 當您認為「性能」的重要性極強於「價格」時，請在「性能」這邊的“極強” 上打“√”。
2. 若您認為「性能」的重要性頗強於「車輛造型」，請在「性能」這邊的“頗強” 上打“√”。
3. 若您認為「安全性」的重要性絕強於「性能」，請在「安全性」這邊的“絕強” 上打“√”。舉例填答如下所示：

項目 \ 強度	絕強	極強	頗強	稍強	等強	稍強	頗強	極強	絕強	項目								
	9	8	7	6	5	4	3	2	1		2	3	4	5	6	7	8	9
性能	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	價格
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	車輛造型
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	安全性





思考問題(一)

- 九點重要性強度尺度是否合理 (Miller, 1956) ?
- 九點重要性強度尺度是否夠用 ?
- **AHP** 是否需要模糊集合、灰色理論、或區間值等的理論支持 ?



Table 1.1 The Fundamental Scale of Absolute Numbers

Intensity of Importance	Definition	Explanation
1	Equal importance	Two activities contribute equally to the objective
3	Moderate importance	Experience and judgment slightly favor one activity over another
5	Strong importance	Experience and judgment strongly favor one activity over another
7	Very strong importance	An activity is favored very strongly over another; its dominance is demonstrated in practice
9	Extreme importance	The evidence favoring one activity over another is of the highest possible order of affirmation
2,4,6,8	For compromise between the preceding values	Sometimes we need to interpolate a compromise judgment numerically because there is no good word to describe it
Reciprocals	If activity i has one of the above nonzero numbers assigned to it when compared with activity j , then j has the reciprocal value when compared with i	A comparison mandated by choosing the smaller element as the unit in order to estimate the larger one as a multiple of that unit
Rationals	Ratios arising from the scale	If consistency is to be forced by obtaining n numerical values to span the matrix
1.1-1.9	For tied activities	When elements are nearly indistinguishable; moderate is 1.3 and extreme is 1.9





思考問題(二)

- 正倒值矩陣內元素是透過九點重要性強度尺度來完成的，因此問卷內容必需反映出兩兩元素成對比較的對應關係；但是我們可利用正倒值矩陣的特性來減少問題的數目。
- 請問前述小汽車評估準則間的比較，為**5x5**的方陣，需要詢問幾個問題？



矩陣特徵值近似計算舉例

- 小汽車評估準則之正倒值矩陣的特徵值近似計算
 - 利用前面正倒值矩陣與優先向量相乘後，將得元素除以其優先向量中相對位置元素
 - 行(column)向量的平均值即為近似的最大特徵值 (eigenvalue)

$A r$	$(A r)_i / r_i$
0.5649	5.0970
0.2281	5.0416
1.9810	5.1074
0.6704	5.0363
1.6263	5.0360
$\lambda_{\max} =$	5.0637

- 此時最大特徵值 λ_{\max} 用以協助檢驗矩陣的一致性 (consistency)

層級的綜合

■ 層級綜合的過程：

- 由最下層的優先向量 B_h 往上相乘，一次上推一個層級 B_{h-1} ，一直推到最上層級(第一層)，而得到最終優先向量 W 為止。
- 此時的向量(或矩陣)元素的優先比率即為對應各方案的評估值。可據此比率值的大小，依序排定方案的優先順序。
- $W = B_h B_{h-1} \dots B_2 W'$

其中 h 為層級數目， B_2 為第二層的優先向量

若第一層只有一個元素(目標)，則 $W' = 1$



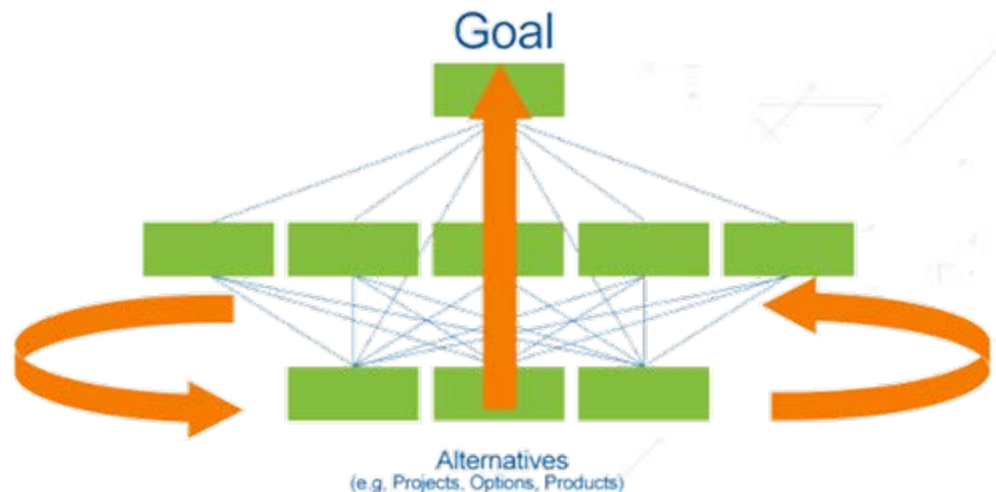
思考問題(三)

- 請思考一個生活上的決策問題，並畫出一個三個層級的結構及其相關元素。
- 如何決定層級？另各層級內的元素如何得到的？

1. Structure Objectives or Criteria
(May have multiple levels)

2. Measure relative importance
of objectives and alternatives to
objectives

3. Synthesize and calculate results
to show priorities of alternatives
relative to the Goal

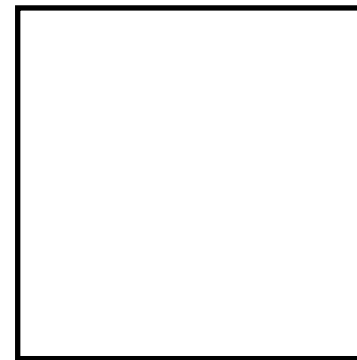
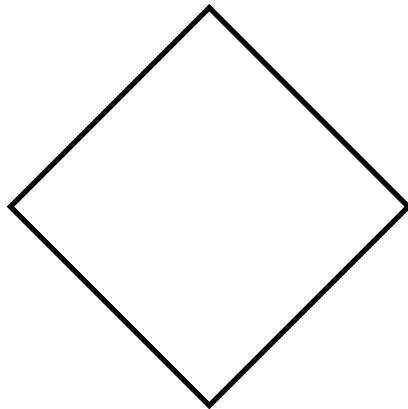
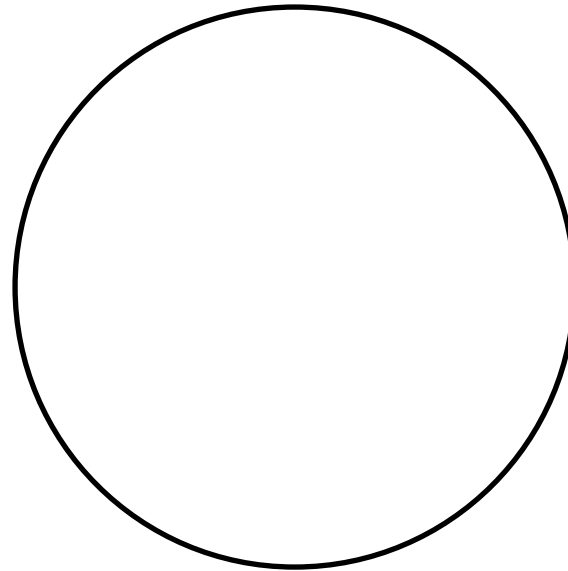
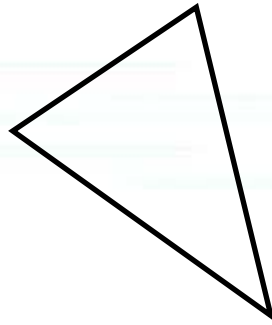




思考問題(四)

- 請用九點重要性強度尺度，兩兩比較下列圖型，以找出其大小比率。
 - 要相信自己的判斷！





決策分析

第十單元 分析層級程序法

一致性檢驗



Tamkang University

Management Sciences · Decision Analysis Laboratory | Since 1972



一致性檢驗(一)

- 在作成對比較時，往往因為比較元素眾多而難以滿足邏輯上的遞移性，因此需進行一致性檢驗。期望此不一致的情況能被控制在一個可接受的範圍內。經實驗得知，此檢驗指標小於**0.1**將可保證較佳的一致性。
- 利用矩陣的最大特徵值 λ_{\max} 協助檢驗矩陣的一致性。若此特徵值等於矩陣的秩數 n ，則為完美的一致，此時檢驗指標等於**0**。



一致性檢驗(二)

■ AHP提供兩類一致性檢驗

● 矩陣一致性檢驗

— 利用矩陣最大特徵值計算其一致性指標及參考其隨機指標，並藉以了解正倒值矩陣的邏輯一致性。

● 層級一致性檢驗

— 利用各層級元素間的一致性指標及其隨機指標，以獲得整個層級一致性及相關隨機指標，並藉以了解整個層級的一致性。

※ 若沒有通過一致性檢驗，則需重新填寫矩陣中元素的相對權重，繼續檢驗，直至通過為止。



矩陣一致性檢驗步驟

- 完成 $n \times n$ 成對比較矩陣
- 計算最大特徵值 λ_{\max} (利用近似法獲得)
- 計算**一致性指標** C.I. (consistency index)
$$\text{C.I.} = (\lambda_{\max} - n) / (n - 1)$$
- 查表得到**隨機指標** R.I. (random index) (與矩陣的秩數 n 有關)
- 計算**一致性比率** C.R. (consistency ratio)
$$\text{C.R.} = \text{C.I.} / \text{R.I.} < 0.1 \text{ 才算通過檢驗}$$

隨機指標

- 隨機指標是以大量樣本實驗，利用從1-9評估尺度所產生正倒值矩陣，在不同階數 n 下所產生的C.I.值，可以當作不一致性的參考標準。

隨機指標 R.I. 值對照表

矩陣秩數 n	1	2	3	4	5	6	7	8
R.I. 值	0.00	0.00	0.58	0.90	1.12	1.24	1.32	1.41
矩陣秩數 n	9	10	11	12	13	14	15	
R.I. 值	1.45	1.49	1.51	1.48	1.56	1.57	1.58	





矩陣一致性檢驗舉例

■ 小汽車評估準則矩陣的一致性檢驗

A					
準則 / 屬性	動力	顏色	價格	性能	服務
動力	1	3	1/5	1	1/3
顏色	1/3	1	1/7	1/3	1/7
價格	5	7	1	3	1
性能	1	3	1/3	1	1/2
服務	3	7	1	2	1

r	
G.M.	Priority Vector
0.7248	0.1108
0.2959	0.0452
2.5365	0.3879
0.8706	0.1331
2.1118	0.3229
6.5395	1.0000

$n = 5$
 $R.I. = 1.12$

Ar	(Ar) _i / r _i
0.5649	5.0970
0.2281	5.0416
1.9810	5.1074
0.6704	5.0363
1.6263	5.0360

$\lambda_{\max} = 5.0637$

C.I. = 0.0159

C.R. = 0.0142 <

0.1 **OK!**

層級一致性檢驗步驟

- 計算層級一致性指標 (consistency index of the hierarchy, C.I.H.)

$$C.I.H. = \sum_l (\text{每個層級的優先向量}) (\text{每層級的C.I.})$$

- 計算層級隨機指標 (random index of the hierarchy, R.I.H.)

$$R.I.H. = \sum_l (\text{每個層級的優先向量}) (\text{每層級的R.I.})$$

- 計算層級一致性比率 (consistency ratio of the hierarchy, C.R.H.)

$$C.R.H. = C.I.H./R.I.H. < 0.1 \text{ 才通過檢驗}$$

※利用原本矩陣的C.I.與R.I.資料彙集



思考問題(五)

- 一致性檢驗是在檢查多個元素成對比較後，是否產生嚴重違反數學遞移性的情況 (其容許上限值為 0.1)。
- 請問若只有兩個元素的比較，是否有遞移性的問題？





思考問題(六)

- 請問有其它方式求得特徵值嗎？
- 請找一個生活上的例子，完成一個正倒值矩陣，並進行一致性檢驗。如果一致性檢驗未通過，要如何修正？
- 請比較**AHP**的分析步驟與決策制定程序的內容之異同。



決策分析

第十單元 分析層級程序法

分析步驟

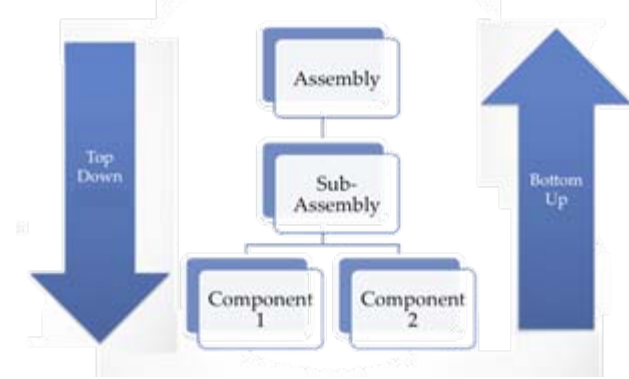


Tamkang University

Management Sciences · Decision Analysis Laboratory | Since 1972

AHP的分析步驟

- 了解待評估問題
- 列舉與問題有關之評估因素(目標、準則、方案)
- 建立層級關係
- 建立各層級的成對比較矩陣
- 獲得矩陣的優先向量
- 檢驗各矩陣以及層級的一致性
- 綜合優先向量以獲得評比結果
- 執行敏感度分析



(top down)



(bottom up)

敏感度分析

- 敏感度分析在協助了解**AHP**層級結構中，某一項參數變動對整體結果的影響。
- 可對較重要因素，譬如優先向量中數值較高者，再增加或減少其數值 (如漸進調整其原始值幅度 $\pm 10\%$ 到 $\pm 50\%$)，然後觀察此變化趨勢對最終結果的影響。
- 若最終結果或方案排序受到影響，則此因素即為敏感性參數，必須謹慎處理或重行檢討整個分析過程。

敏感度分析舉例(一)

■ 小汽車評估準則間之優先向量或權重

- 動力 $w_1=0.1108$; 顏色 $w_2=0.0452$; 價格 $w_3=0.3879$; 性能 $w_4=0.1331$; 服務 $w_5=0.3229$ 。

■ 原則以權重較大者進行敏感度分析，若此時選價格 w_3 分析

- 若價格 w_3 增加10%，調整後的權重為 $0.3879 \times (1+10\%) = 0.4267$ 。
- 其它準則的權重就要按原本權重比例，分攤此0.0388的數值(即 w_1, w_2, w_4 ，與 w_5 需等比例減少0.0388的總量)。
- 任何情況下，權重和必需為1。

敏感度分析舉例(二)

■ 若以公式表示價格 w_3 增加10%

- $w_3' = 1.1 \times w_3$
- $w_1' = w_1 - \frac{w_1}{(w_1 + w_2 + w_4 + w_5)} \times 0.1 \times w_3$
-
- $w_5' = w_5 - \frac{w_5}{(w_1 + w_2 + w_4 + w_5)} \times 0.1 \times w_3$

■ 若價格 w_3 減少10%

- $w_3' = 0.9 \times w_3$
- $w_1' = w_1 + \frac{w_1}{(w_1 + w_2 + w_4 + w_5)} \times 0.1 \times w_3$
-
- $w_5' = w_5 + \frac{w_5}{(w_1 + w_2 + w_4 + w_5)} \times 0.1 \times w_3$



思考問題(七)

- 請思考敏感度分析的意義以及如何選擇分析的對象。
- 此敏感度分析要如何在**Excel**軟體上執行？



分析層級程序法

案例

工業區地點評估問題



Tamkang University

Management Sciences · Decision Analysis Laboratory | Since 1972



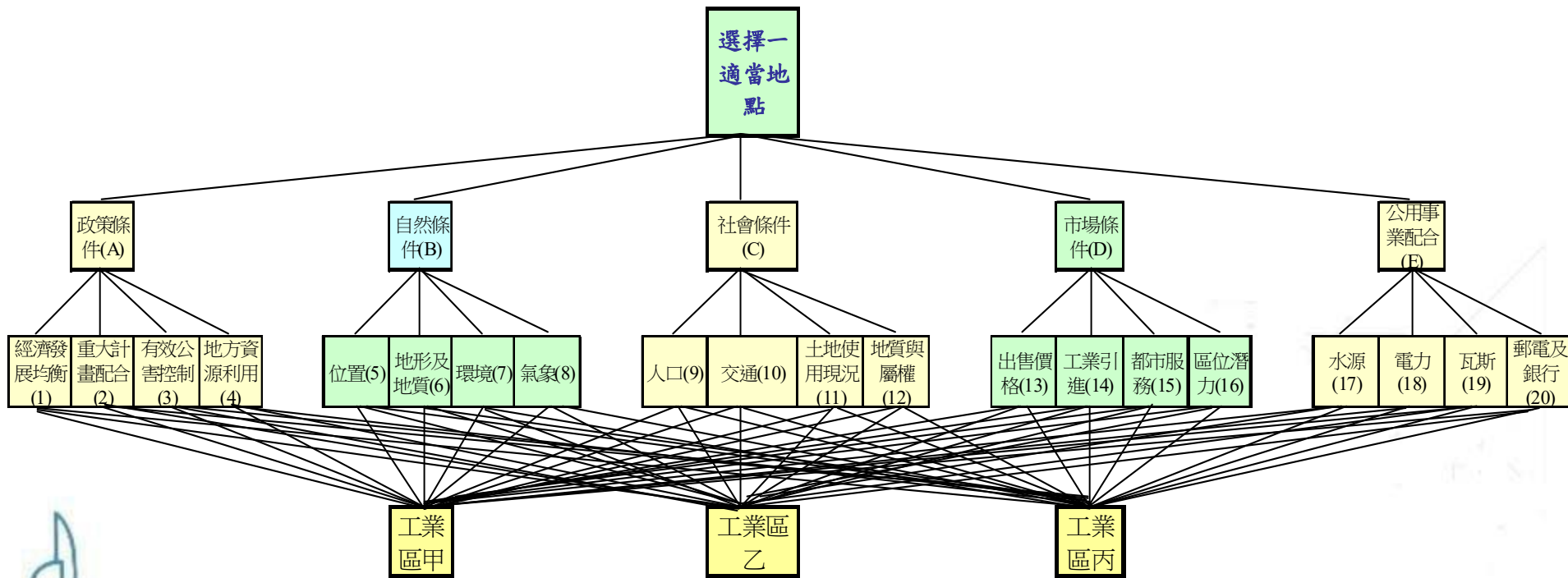
地點評估案例(一)

- 政府欲開發一個工業區以促進投資意願。目前有三個地點(甲、乙、丙)可供選擇，請利用AHP分析以協助選擇一最適當的地點。
- 經專家評估後，其考慮因素(準則)有：政策條件(A)、自然條件(B)、社會條件(C)、市場條件(D)、公用事業配合(E)。
 - 政策條件又分經濟發展均衡等四項 (1~4)
 - 自然條件又分位置等四項 (5~8)
 - 社會條件又分人口等四項 (9~12)
 - 市場條件又分出售價格等四項 (13~16)
 - 公用事業配合又分水源等四項 (17~20)

地點評估案例(二)

■ 分析層級結構圖 (共四層)

- 選擇一適當地點



地點評估案例(三)

■ (1) 第二層五個準則用以支持第一層的目標

地點選擇	<i>A</i>					<i>r</i>	
	A	B	C	D	E	<u>G.M.</u>	nom.G.M.
A	1	1/5	1/7	1/9	3	0.394	0.048
B	5	1	1/3	1/7	5	1.035	0.125
C	7	3	1	1/3	7	2.178	0.263
D	9	7	3	1	9	4.427	0.534
E	1/3	1/5	1/7	1/9	1	0.254	0.031
						8.289	1.000

<i>A r</i>	$(A r)_i / (A)_i$
0.261	5.495
0.680	5.442
1.363	5.188
2.901	5.431
0.168	5.494

$n =$	5			
λ_{max}	C.I.	R.I.	C.R.	
5.410	0.102	1.12	0.092	OK!

地點評估案例(四)

- (2) 第三層二十個次準則分別支持第二層的五個準則

政策條件(A)	<i>A</i>			
	(1)	(2)	(3)	(4)
(1)	1	3	1/3	1
(2)	1/3	1	1/5	1/3
(3)	3	5	1	3
(4)	1	3	1/3	1

<i>r</i>	
G.M.	nom.G.M.
1.000	0.201
0.386	0.078
2.590	0.520
1.000	0.201
4.976	1.000

$$n = 4$$

<i>Ar</i>	$(Ar)_i / (A)_i$
0.808	4.022
0.316	4.068
2.114	4.062
0.808	4.022

λ_{max}	C.I.	R.I.	C.R.	
4.043	0.014	0.9	0.016	OK!

地點評估案例(五)

■ (2-) 第三層의 其它參考準則

自然條件(B)	<i>A</i>			
	(5)	(6)	(7)	(8)
(5)	1	3	5	9
(6)	1/3	1	3	7
(7)	1/5	1/3	1	5
(8)	1/9	1/7	1/5	1

<i>r</i>	
G.M.	nom.G.M.
3.409	0.565
1.627	0.270
0.760	0.126
0.237	0.039
6.032	1.000

<i>Ar</i>	$(Ar)_i / (A)_i$
2.358	4.173
1.111	4.121
0.526	4.173
0.166	4.215

$n =$	4			
λ_{max}	C.I.	R.I.	C.R.	
4.170	0.057	0.9	0.063	OK!

地點評估案例(六)

■ (3) 第四層三個方案分別在二十個次準則上的表現

(1)	<i>A</i>			<i>r</i>	
	甲	乙	丙	<u>G.M.</u>	nom.G.M.
甲	1	1/2	1/8	0.397	0.091
乙	2	1	1/4	0.794	0.182
丙	8	4	1	3.175	0.727
				4.365	1.000

		<i>n</i> =	3			
<i>A r</i>	$(A r)_i / (A)_i$	λ_{max}	C.I.	R.I.	C.R.	OK!
0.273	3.000	3.000	0.000	0.58	0.000	
0.545	3.000					
2.182	3.000					

地點評估案例(七)

■ (3-) 第四層其它次準則上的表現 (共二十個)

(2)	<i>A</i>			<i>r</i>	
	甲	乙	丙	<u>G.M.</u>	nom.G.M.
甲	1	7	7	3.659	0.778
乙	1/7	1	1	0.523	0.111
丙	1/7	1	1	0.523	0.111
$n =$				4.705	1.000
$n =$				3	

<i>A r</i>	$(A r)_i / (A)_i$	λ_{max}	C.I.	R.I.	C.R.	
2.333	3.000	3.000	0.000	0.58	0.000	OK!
0.333	3.000					
0.333	3.000					

地點評估案例(八)

- (4) 計算層級一致性
- (4a) 獲得各層級的優先向量與一致性指標
- 第二層

	priority vector
A	0.048
B	0.125
C	0.263
D	0.534
E	0.031
	1.000

C.I.	0.102
R.I.	1.12

地點評估案例(九)

■ 第三層

		priority vector				
		A	B	C	D	E
(1)		0.201				
(2)		0.078				
(3)		0.520				
(4)		0.201				
(5)			0.565			
(6)			0.270			
(7)			0.126			
(8)			0.039			
(9)				0.038		
(10)				0.111		
(11)				0.259		
(12)				0.591		
(13)					0.424	
(14)					0.050	
(15)					0.103	
(16)					0.424	
(17)						0.715
(18)						0.156
(19)						0.064
(20)						0.064
		1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
C.I.		0.014	0.057	0.068	0.024	0.030
R.I.		0.9				

地點評估案例(十)

■ 第四層

	(1)	(2)	(3)	(4)
C.I.	0.000	0.000	0.017	0.000
	(9)	(10)	(11)	(12)
	0.036	0.036	0.000	0.009
	(17)	(18)	(19)	(20)
	0.000	0.000	0.005	0.017
R.I.	0.58			

	(5)	(6)	(7)	(8)
	0.040	0.000	0.005	0.032
	(13)	(14)	(15)	(16)
	0.027	0.036	0.027	0.040



地點評估案例(十一)

■ (4b) 計算層級一致性指標 C.I.H.

第一層	0.102				
第二層	0.040				
第三層	0.009	0.025	0.011	0.033	0.001
C.I.H.	0.221				

■ (4c) 計算層級隨機性指標 R.I.H.

第一層	1.12				
第二層	0.9				
第三層	0.580	0.580	0.580	0.580	0.580
R.I.H.	4.920				

■ (4d) 計算層級一致性比率 C.R.H.

$$\text{C.R.H.} = \text{C.I.H.} / \text{R.I.H.} \quad 0.045 \quad \text{OK!}$$

地點評估案例(十二)

- (5) 綜合優先向量以獲得評比結果
- (5a) 自下而上計算方式：首先計算最下層(第四層與第三層) 關係 **3X20** 矩陣

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
B4	0.091	0.778	0.630	0.091	0.785	0.053	0.540	0.731	0.743	0.743
	0.182	0.111	0.261	0.182	0.149	0.474	0.163	0.188	0.194	0.194
	0.727	0.111	0.108	0.727	0.066	0.474	0.297	0.081	0.063	0.063
check	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

	(11)	(12)	(13)	(14)	(15)	(16)	(17)	(18)	(19)	(20)
	0.143	0.073	0.058	0.743	0.770	0.785	0.462	0.400	0.540	0.630
	0.429	0.256	0.278	0.194	0.162	0.149	0.462	0.200	0.163	0.261
	0.429	0.671	0.663	0.063	0.068	0.066	0.077	0.400	0.297	0.108
check	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

地點評估案例(十三)

- (5b) 繼續往上一層，計算最第三層與第二層關係
20X5 矩陣

B₃

	A	B	C	D	E
(1)	0.201				
(2)	0.078				
(3)	0.520				
(4)	0.201				
(5)		0.565			
(6)		0.270			
(7)		0.126			
(8)		0.039			
(9)			0.038		
(10)			0.111		
(11)			0.259		
(12)			0.591		
(13)				0.424	
(14)				0.050	
(15)				0.103	
(16)				0.424	
(17)					0.715
(18)					0.156
(19)					0.064
(20)					0.064
Check	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000



地點評估案例(十四)

- (5c) 再往上一層，計算最第二層與第一層關係
5X1 矩陣

B_2

A	0.048
B	0.125
C	0.263
D	0.534
E	0.031
check	1.000

- (5d) 再往上一層(第一層)，只有一個元素故為一
純量

W' 1.000

地點評估案例(十五)

■ (5e) 彙集所有矩陣資訊，即 $W = B_4 B_3 B_2 W'$

$B_4 B_3$

	A	B	C	D	E
甲	0.425	0.555	0.191	0.474	0.468
乙	0.218	0.240	0.291	0.207	0.389
丙	0.357	0.205	0.517	0.319	0.144
check	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

$B_4 B_3 B_2$

甲	0.407		
乙	0.240		
丙	0.353		
check	1.000		

W'

	1.000
--	-------

$B_4 B_3 B_2 W'$

		Rank
甲	0.407	1
乙	0.240	3
丙	0.353	2
check	1.000	

■ 工業區地點甲為最優

地點評估案例(十六)

■ 敏感度分析(1)

- 選擇次準則中「有效公害控制(3)」進行敏感度分析。
- 將其原始權重**0.520** 增減**30%**，觀察此變動對方案的優先向量及其排序的影響。

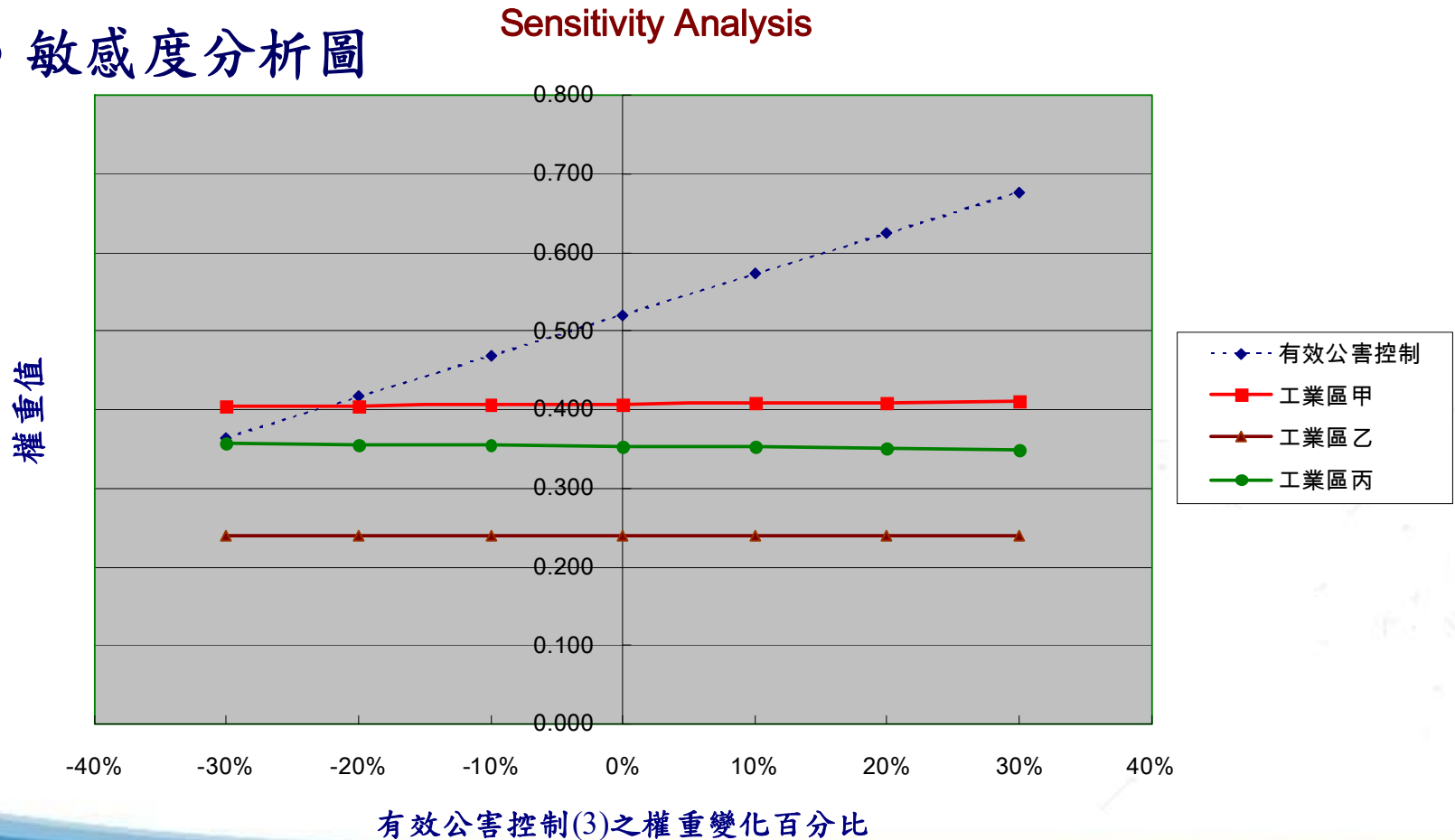
變動比例	-30%	-20%	-10%	0%	10%	20%	30%	
權重	0.364	0.416	0.468	0.520	0.573	0.625	0.677	
工業區甲	0.404	0.405	0.406	0.407	0.408	0.409	0.410	Rank 1
工業區乙	0.239	0.239	0.239	0.240	0.240	0.240	0.240	3
工業區丙	0.357	0.356	0.355	0.353	0.352	0.351	0.349	2
check	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	

- 上表中可以看出：方案的排序並未受影響，故此次準則並不敏感。

地點評估案例(十七)

■ 敏感度分析(2)

● 敏感度分析圖





思考問題(八)

- 仔細檢查本案例「工業區地點評估問題」之計算細節，確認是否了解這個方法。
- 是否能利用 **Excel** 軟體完成所有計算？
- 敏感度分析的圖形是如何畫出來的？



分析層級程序法

應用與擴展



Tamkang University

Management Sciences · Decision Analysis Laboratory | Since 1972

應用與擴展



- 分析注意事項
- AHP的優點
- AHP的限制
- 排序逆轉現象
- 應用領域
- 分析方法比較
- 分析過程注意事項
- AHP的擴展
- AHP的是與非





分析注意事項(一)

■ 目標確定

- 各利害關係人的立場為何？問題的適切範圍為何？
- 5W1H 可以協助釐清問題。

■ 層級架構

- 是否適當表達待解決問題的特性？如何得到此架構？

■ 各層級中的元素(考量因素)

- 如何得到的這些因素？
- 因素分析或可協助確認。

■ 方案

- 是用來滿足目標、或是解決問題的。
- 具代表性，過多與過少都不好。

分析注意事項(二)

■ 成對比較問卷設計與發放

- 專家問卷調查，不需太多對象(e.g., <10)。
- 專家選擇可依據其學歷、經驗、或社會的成就水準。
好的結果來自好的判斷。

■ 問卷資料合併

- 以幾何平均處理輸入的資料或是優先向量的資料。

■ 分析檢驗

- 各矩陣一致性與層級一致性檢驗。

■ 敏感度分析

- 分析重要因素變動對分析結果的影響。



AHP的優點

- 理論簡單、操作容易，且能擷取多數專家及決策者意見 (如腦力激盪法、德菲法)。
- 對於影響目標之因素，皆能充份考量到各種不同的層面。
- 對於量化與非量化因素，經過專家評估及數學的處理後，能以具體的數值顯示各關鍵因素的優先順序。
- 可將複雜的評估因素以簡單的層級表現，易被決策者了解與接受。
- 一致性檢驗提供一個檢查輸入資料正確性的機會。



AHP的限制

- 各層級中的評估因素，如準則間或方案間，必須獨立。
 - ※下層與上層相依
- 層級結構一經確定，分析中不得變動。
- 方案一經確定，在分析中不得增加或減少。
- 在評估時，對於偏好的表達必須滿足倒數的特性。



排序逆轉現象(一)

- **排序逆轉(rank reversal)** 是指在決策過程中，選擇方法改變、方案組合或是準則數目的變動時，造成方案的偏好順序變動。
- 違反多屬性效用理論中**無關方案的獨立性** (Independence of irrelevant alternatives, IIA) 假設。
- 在多準則決策方法中，**AHP** 涉及兩兩成對比較方式，是最早被發現產生排序逆轉現象者 (Belton and Gear, 1983)。



排序逆轉現象(二)

■ Belton and Gear (1983) 數值舉例說明AHP排序逆轉現象

- 有三個方案(A, B, C)在三項準則(C_1 , C_2 , C_3)下的績效值，並考慮各準則等權重。

Alternative	Criteria		
	C_1	C_2	C_3
A	1	9	8
B	9	1	9
C	1	1	1

- 經AHP計算後，方案排序為：**B > A > C**。
- 若複製方案B的績效值產生方案D，再經相同的步驟計算，則方案排序為：**A > B ≈ D > C**。

排序逆轉現象(三)

■ Distributive mode & Ideal mode

- 原本AHP計算過程中，方案的優先值之總和為1，稱為 **Distributive mode**。
- 為消除排序逆轉現象，此時可調整方案中的最大優先值為1，其餘方案的優先值按比例調整，稱為 **Ideal mode**。此時方案的優先值之總和就超過1。
- 經採用 **Ideal mode** 計算後，則方案排序為： $B \approx D > A > C$ 。與原來三個方案的排序 $B > A > C$ 相同。

■ AHP排序逆轉現象曾在Omega, Management Science, EJOR, JORS等主流期刊掀起論戰。



思考問題(九)

- 使用**AHP**分析時，產生排序逆轉的原因為何？
- 採用**Distributive mode**後，是否可以完全解決**AHP**分析中排序逆轉的現象？



應用領域

■ 應用範疇舉例：

- 經濟與規劃
- 能源 (政策與資源分配)
- 健康
- 衝突解決、軍事管制與世界影響
- 材料控制
- 彈性製造系統
- 人力選擇與績效評估
- 專案計畫選擇
- 行銷管理
- 資料庫管理系統的選擇等30類 (Zahedi, 1986)

分析方法的比較

Table 1
Comparison of characteristics between AHP and TOPSIS

Characteristics	AHP	TOPSIS
1 Category	Cardinal information, information on attribute, MADM	Cardinal information, information on attribute, MADM
2 Core process	Pairwise comparison (cardinal ratio measurement)	The distances from PIS and NIS (cardinal absolute measurement)
3 Attribute	Given	Given
4 Weight elicitation	Pairwise comparison	Given
5 Consistency check	Provided	None
6 No. of attributes accommodated	7 ± 2 or hierarchical decomposition	Many more
7 No. of alternatives accommodated	7 ± 2	Many more
8 Others	Compensatory operation	Compensatory operation

Note: Please refer to Hwang and Yoon [1], Saaty [17], and Saaty and Ozdemir [18].



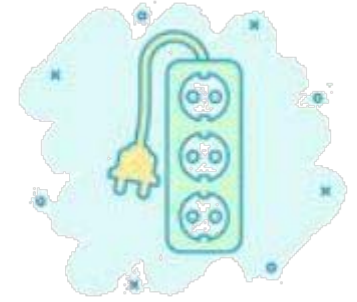


思考問題(十)

- 若有具體客觀的數值資料，在**AHP**中如何處理？
- 如何降低**AHP**中排序逆轉的現象？
- 請找出一個**AHP**的例子，並以超級矩陣 (super matrix) 表達並計算之。
- 若有兩位分析者獨自以**AHP**方法，解決同一個問題。請問他們的層級結構會相同嗎？



AHP的擴展



■ AHP的軟體

- ExpertChoice

■ 分析網路程序法 (analytic network process, ANP)

- 可處理準則間與層級間(元素與群組間)的相依與回饋
- Super Decisions 軟體

■ AHP的延伸

- 用於利益(benefits)、機會(opportunities)、成本(costs)、與風險(risks)四個面向的分析
- 預測用途
- 支援其它決策方法的權重獲取(特徵值法)
- 群體AHP

群體AHP(一)



- 彙集群體偏好需在社會選擇理論(social choice theory) 的架構，也就是群體理性。
- 在分析個體偏好與群體選擇間的關係，研究可以對不同社會狀態，進行公正排序或以其他方式加以評估的方法。常用四項公理如下：
 - **Axiom 1: 廣泛性定義域(universal domain)或無約束條件(unrestricted domain)**
群體偏好彙集方法應為所有邏輯可能的個體偏好，定義出群體偏好的類型。(個體任何偏好都是許可的)
 - **Axiom 2: 非獨裁性(non-dictatorship)**
沒有個體偏好獨立於其他成員的偏好外，而自動成為群體的偏好。

群體AHP(二)

■ 社會選擇理論常用公理如下：

● Axiom 3: 無關方案的獨立性(IIA)

若一方案被刪除，則新方案集中的方案排序應相當於原始方案集中的各方案排序。

● Axiom 4: 柏雷多最佳性(Pareto optimality)或一致性(unanimity)

若所有個體都偏好一些選擇(譬如 $X > Y$)，則群體偏好也應如此。



群體AHP(三)

■ AHP的群體偏好整合有兩類：

● 彙集個體判斷(agggregating individual judgment, AIJ)

- 彙集所有個體偏好正倒值矩陣的元素，譬如使用幾何平均數整合。
- 所有個體整合成為一個新的「個體」，故不適用社會選擇理論。

● 彙集個體優先(向量)(agggregating individual priorities, AIP)

- 彙集所有個體偏好優先(向量)，可使用幾何平均數或算數平均數整合。
- 個體均有其價值系統，整合成為一個群體。
- 除了**AHP**本身不能滿足無關方案的獨立性(IIA)外，其餘公理均可滿足。

群體AHP(四)



■ 加權平均數整合公式：

● 彙集個體判斷(AIJ)

— 加權幾何平均

$$J_g(h, l) = \sqrt[K]{\prod_{k=1}^K j_k(h, l)^{w_k}}$$

K 位個體比較 k 與 l 兩項因素， w_k 為第 k 位個體的權重(決策權重)

● 彙集個體優先(向量)(AIP)

— 加權幾何平均

$$P_g(A_i) = \sqrt[K]{\prod_{k=1}^K p_k(A_i)^{w_k}}$$

K 位個體對方案 A_i 比較後的優先(向量)， w_k 為第 k 位個體的權重

— 加權算數平均

$$P_g(A_i) = \frac{\sum_{k=1}^K w_k p_k(A_i)}{K}$$



AHP的是與非(一)

- 1. AHP使用兩兩成對比較
- 2. AHP不能接受客觀性
 - Qualitative data, numerical data
- 3. AHP不滿足MAUT中無關方案獨立性的假設
 - Independence of irrelevant alternatives
- 4. 排序逆轉是由特徵向量計算所造成的
- 5. 容許排序逆轉的技術是缺陷的
- 6. 假如期望預先排除排序逆轉，則AHP就不能使用
 - Distributive mode & ideal mode

AHP的是與非(二)

- 7. 在綜合多維度數值時，若比例尺度性質需要維持，對同樣的常數或標準的正規化是必要的
- 8. AHP容許不一致性
- 9. 低一致性的AHP分析是一個好的分析
- 10. AHP因其九點尺度而受限
 - 實驗而得
- 11. 不一致性及非遞移性是不好的
- 12. AHP容許不一致性及非遞移性是其強項而非弱點
- 13. AHP不能處理不確定性
 - Backward process & forward process



AHP的是與非(三)

- 14. AHP與MAUT (MAVT) 相似處比相異處多
- 15. 對於一個三階的問題，AHP可產生與期望價值理論(expected value theory) 相同的結果
- 16. 在AHP中準則的權重可依據方案的價值自動計算或調整
- 17. 在一般的AHP分析中，通常需要花許多時間作兩兩成對比較
 - weakness
- 18. 使用AHP作兩兩成對比較需要過多的時間
 - Less than the time spent for data collection & analysis

結語(一)

- 分析層級程序法是利用幾何圖像的方式，提供一個的層級架構從上到下系統化描述與解析問題，並輔之數學理論與步驟，使其成為當今最廣泛使用的多準則決策分析技術。
- 兩兩成對比較與九點重要性強度尺度為**AHP**的核心，有利於決策者進行層級間影響關係的描述以及層級中因素的比較。這些獲得的優先向量在層級間由下而上整合，最後得到在問題目標下解決方案的優先順序。
- 在**AHP**架構下，具體因素與不具體因素都可根據其影響，進行兩兩成對比較，而得到具體的優先數值。這對於複雜問題的解析，提供一個量化呈現的機會，此特點被廣泛接受且應用。



結語(二)

- 一致性檢驗可協助檢查輸入資料不一致性的機會，可降低人為判斷的誤差。
- **AHP**方法中進行群體偏好彙集時，幾何平均數為最常用的方式，惟在彙集前必先取得群體的共識。
- **AHP**在處理層級內元素時，是假設其間為獨立，這是簡化處理問題的方式。若元素間相依與回饋關係明顯時，則需藉由**AHP**一般化的分析網路程序法(**Analytic Network Process, ANP**)協助分析。





參考文獻(一)

- E.H. Forman (1993), Facts and fictions about the analytic hierarchy process. *Mathematical and Computer Modelling*, 17(4-5), 19-26.
- E.H. Forman, K. Peniwati (1998), Aggregating individual judgments and priorities with the analytic hierarchy process. *European Journal of Operational Research*, 108, 165-169.
- K. Peniwati (2007), Criteria for evaluating group decision-making methods. *Mathematical and Computer Modelling*, 46, 935-947.
- T.L. Saaty (1980), *The Analytic Hierarchy Process*. New York: McGraw Hill.
- T.L. Saaty (1986), Axiomatic foundation of the *analytic hierarchy process*. *Management Science*, 32(7), 841-855.



參考文獻(二)

- T.L. Saaty (2005), *The Analytic Network Process: Decision Making with Benefits, Opportunities, Costs, and Risks*. Pittsburgh: RWS Pub.
- T.L. Saaty, H.-S. Shih (2009), Structures in decision making: On the subjective geometry of hierarchies and networks. *European Journal of Operational Research*, 199(3), 867-872.
- T.L. Saaty, M.S. Özdemir (2014) How many judges should there be in a Group? *Annals of Data Science*, 1(3-4), 359-368.
- 鄧振源(2012), *多準則決策分析*。台北：鼎茂。
- 楊維楨(2009), *系統分析*。台北：五南。

參考文獻(三)

回顧性論文(1)

- Emrouznejad, A., Marra, M. (2017), The state of the art development of AHP (1979–2017): a literature review with a social network analysis. *International Journal of Production Research*, 55: 6653-6675.
- Ho, W. (2008), Integrated analytic hierarchy process and its applications – A literature review. *EJOR*, 186: 211-228.
- Ishizaka, A., Labib, A. (2011), Review of the main developments in the analytic hierarchy process. *Expert Systems with Applications*, 38: 14336-14345.
- Sipahi, S., Timor, M. (2010), The analytic hierarchy process and analytic network process: an overview of applications. *Management Decision*, 48(5): 775-808.



參考文獻(四)

回顧性論文(2)

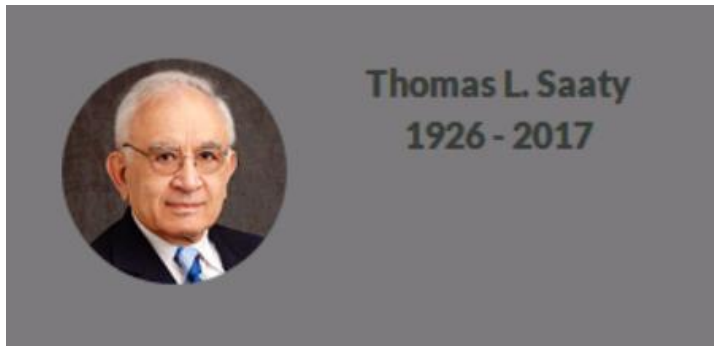
- Vaidya, O.S., Kumar, S. (2006), Analytic hierarchy process: an overview of applications. *European Journal of Operational Research*, 169: 1-29.
- Vargas, L.G. (1990), An overview of the analytic hierarchy process and its applications. *EJOR*, 48(1): 2-8.
- Zahedi, F. (1986), The analytic hierarchy process: a survey of methods and its applications. *Interfaces*, 16(4): 96-108.
- Zyoud, S.H., Fuchs-Hanusch, D. (2017), A bibliometric-based survey on AHP and TOPSIS techniques, *Expert Systems with Applications*, 78: 158-181.



AHP之父 – Professor T.L. Saaty



- Pittsburgh, USA on the 23rd of June 2007



- Died on the 14th of August 2017

2008 INFORMS Impact Prize for AHP

informs *Institute for Operations Research
and the Management Sciences*

2008

INFORMS IMPACT PRIZE

Awarded to

Thomas L. Saaty

The Analytic Hierarchy Process is a methodology for helping decision makers to make complex, multi-criteria decisions. Professor Thomas L. Saaty developed the Analytic Hierarchy Process (AHP) based on his work at the U. S. State Department's Arms Control and Disarmament Agency during the Kennedy and Johnson administrations.

Professor Saaty recognized that then current techniques for resolving complex decision problems were deficient in both their mathematical rigor and their relevance to real-world decision-making. Professor Saaty's early AHP research dealt with how multi-criteria, decision-making problems could be structured as goal seeking hierarchies. He developed key mathematical theories dealing with eigenvalues and eigenvectors and showed how to use pairwise comparisons to determine ratio-scale weights to prioritize the criteria and the alternatives in an intuitively elegant manner. These final weights allow the alternatives to be compared and ranked.

AHP論文發表國家別(Top 10)

Table 1

Ranking of top twenty most productive countries - AHP research.

SRC ^a	Country	No. of documents (%)	<i>h</i> -index	No. of citations	Average citation	Median citation (Q1-Q3)
1st	China	3513 (34.5)	51	16,811	4.79	1 (0-4)
2nd	United States	1209 (11.9)	78	29,430	24.34	9 (2-25)
3rd	Taiwan	866 (8.5)	60	14,463	16.7	4 (1-16)
4th	India	701 (6.9)	39	8355	11.92	3 (0-10)
5th	Iran	649 (6.4)	29	4806	7.41	2 (0-7)
6th	Turkey	464 (4.6)	62	11,478	24.74	6 (1-23)
7th	United Kingdom	388 (3.8)	55	10,496	27.05	8.5 (2-27)
8th	South Korea	282 (2.8)	29	3320	11.77	4 (1-15)
9th	Canada	242 (2.4)	37	3940	16.28	6.5 (2-20)
10th	Malaysia	213 (2.1)	16	1133	5.32	1 (0-5)



分析層級程序法

結 束



Tamkang University

Management Sciences · Decision Analysis Laboratory | Since 1972

